8ο μάθημα

$\boxed{26/11/19}$

Θεωρία Τελεστών

ΠΑΡΑΔ.: $A = \int_0^x ds$, $x \in [0,1]$

$$A|f\rangle = \int_0^x f(s)ds \quad , \quad B = \frac{d}{dx}$$

$|f\rangle$ ανήκει στον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

$$BA|f\rangle = \frac{d}{dx}\int_0^x f(s)ds = f(x) = |f\rangle$$

$$AB|f\rangle = \int_0^x \frac{d}{ds} f(s)ds = f(x) - f(0) = |f\rangle - f(0)$$

- Προσαρτημένοι (adjoint) τελεστές

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Για έναν τελεστή A, σ' ένα δ.χ. S, ορίζεται ο τελεστής A^+ που καλείται προσαρτημένος του A τ.ω. $\langle A^+g|f\rangle = \langle g|Af\rangle$

Παρατήρηση: Ως προς τον συμβολισμό, τα $|Af\rangle$ κ' $\langle A^+g|$ είναι διαν/τα, δηλ. $|Af\rangle = A|f\rangle$, $A^+\langle g|$

Γνωρίζ. ότι: $\langle A^+g|f\rangle = \langle f|A^+g\rangle^* = \langle f|A^+|g\rangle^*$

Δηλ., ισχύει: $\langle g|Af\rangle = \langle g|A|f\rangle = \langle f|A^+|g\rangle^*$

ή $\langle f|A^+g\rangle = \langle g|Af\rangle^*$

$|f\rangle, |g\rangle \in S$

Επίσης: $(A^+)^+ = A$, δηλ.:

$$\langle g|(A^+)^+f\rangle = \langle f|A^+g\rangle^* = \langle g|Af\rangle$$

Αν ακούω προσαρτημένος καταλαβαίνω ότι θα χρησιμοποιήσω εσωτ. γινόμ.

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένας τελεστής λέγεται αυτοπροσαρτημένος (self-adjoint) ή Ερμιτιανός (Hermitian) αν $A^+ = A$

Τότε: $A^+ = A \iff \langle g | A f \rangle = \langle A g | f \rangle$

Ιδιότητες αυτοπροσαρτημένων τελεστών:

1) $(A+B)^+ = A^+ + B^+$

ΑΠΟΔ.: $|f\rangle$ κ. $|g\rangle \in S$

$$\begin{aligned}\langle g | (A+B)^+ f \rangle &= \langle (A+B) f | g \rangle^* \\ &= \langle A f | g \rangle^* + \langle B f | g \rangle^* \\ &= \langle g | A^+ f \rangle + \langle g | B^+ f \rangle \\ &= \langle g | (A^+ + B^+) f \rangle\end{aligned}$$

2) $(AB)^+ = B^+ A^+$

ΑΠΟΔ.: $|f\rangle$ κ. $|g\rangle \in S$

$$\begin{aligned}\langle g | (AB)^+ f \rangle &= \langle ABf | g \rangle^* \\ &= \langle A(Bf) | g \rangle^* \\ &= \langle Bf | A^+ g \rangle^* \\ &= \langle f | B^+ A^+ g \rangle^* \\ &= \langle g | B^+ A^+ f \rangle\end{aligned}$$

δηλ. $(AB)^+ = B^+ A^+$

ΙΔΕ, 2ης τ., μη-ομογ., γραμμ.

$ay'' + by' + \gamma y = f(x) \iff a \cdot \langle y'' | v \rangle + b \langle y' | v \rangle + \gamma \langle y | v \rangle = \langle f | v \rangle$

$a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\langle y'' | v \rangle = \int_a^b y''(x) v(x) dx = \underbrace{y'v' \Big|_a^b}_{\text{σταθερά}} - \int_a^b y'v' dx$$

3) Ο A^+ είναι γραμμικός τελεστής

$$\langle g | A^+ (a|f_1\rangle + b|f_2\rangle) \rangle = a \cdot \langle g | A^+ f_1 \rangle + b \cdot \langle g | A^+ f_2 \rangle$$

4). Ο A^+ ενός τελεστή A είναι μοναδικός

<u>ΑΠΟΔ</u>: Έστω ότι δεν είναι μοναδικός, $B = A_1^+ - A_2^+$

$$\langle g | Bf \rangle = \langle g | (A_1^+ - A_2^+) f \rangle$$
$$= \langle g | A_1^+ f \rangle - \langle g | A_2^+ f \rangle$$
$$= \langle Ag | f \rangle - \langle Ag | f \rangle = 0$$

δηλ. $B = 0 \Rightarrow A_1^+ = A_2^+$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένας τελεστής L λέγεται <u>φραγμένος</u> όταν $\exists c$ τ.ω.: $\|Lf\|^2 = \langle Lf | Lf \rangle \leq c \langle f | f \rangle$
$= c \cdot \|f\|^2$

<u>Π.χ.</u> Αν μιλάμε για τον χώρο των ολοκλ/σιμων συν/σεων, $x \in [a, b]$, $\|f\|^2 = \langle f | f \rangle$
$$= \int_a^b w(x) f^2(x) dx$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Για κάθε φραγμένο, γραμμικό τελεστή, L, $\exists$ ο προσαρτημένος του, L^+.

ΠΑΡΑΔ: Έστω S ο χώρος των ολοκλ/σιμων συν/σεων, με $x \in [0, 1]$. Αν $A = \int_0^1 dx$, ν.δ.ο. $A^+ = A$

<u>ΛΥΣΗ</u>:

$A = \int_0^1 dx$, $|f\rangle = f(x)$, $\langle g| = g^*(x)$

Αν $A \cdot |f\rangle = \int_0^1 f(x) dx$, $\langle g | f \rangle = \int_0^1 g^*(x) f(x) dx$

$\longrightarrow$

Πάντα έτσι ξεκινάω !

$$\langle g | A^+ f\rangle = \langle f | A g\rangle^* = \left[\int_0^1 f^*(x)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)dx\right]^*$$

η δράση του A πάνω στο g

$$= \left[\int_0^1 f^*(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(t)\,dt\right]^*$$

$$= \int_0^1 g^*(t)\,dt \cdot \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{A\cdot|f\rangle} = \langle g | A f\rangle$$

άρα ο $A^+ = A$

ΠΑΡΑΔ.: Στον χώρο των τετραγωνικά ολοκλ. συν/σεων στο (a,b) να βρεθεί ο προσαρτημένος του: $L = k\frac{d}{dx}$, $k \in \mathbb{C}$

ΛΥΣΗ:

$|g\rangle = g(x)$ $|f\rangle = f(x)$ ανήκουν στον χώρο

$$\langle g | f\rangle = \int_a^b g^* f\,dx$$

Παρατήρηση: Έστω ο χώρος των τετραγ. ολοκλ. συν/σεων, F, στο $[a,b]$, $|f\rangle = f(x)$, όταν η

$$\|f\|^2 = \langle f | f\rangle = \int_a^b f(x)\cdot f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx$$

ΥΠΕΝΘ.

τότε $F = L^2_{w=1}([a,b])$

Τότε: $\langle g | L^+ f\rangle = \langle f | L g\rangle^* = \left(\int_a^b f^* k \frac{d}{dx} g(x)\,dx\right)^* =$

$$= \int_a^b f(x) k^* \frac{d}{dx} g^*(x)\, dx \quad \underline{\underline{\text{παραγοντική}}} \atop \text{ολοκλ.}$$

$$= k^* f(x) g^*(x) \Big|_a^b - \int_a^b (k g(x))^* \frac{df}{dx}\, dx$$

$$= k^* f(x) g^*(x) \Big|_a^b + \int_a^b g^*(x) \cdot \underbrace{\left(-k^* \frac{d}{dx} f(x) \right)}_{L^+|f\rangle} dx$$

άρα $L^+ = -k^* \frac{d}{dx}$

υπό την προϋπόθεση ότι $k^* f(x) g^*(x) \Big|_a^b = 0$ ∎

ΑΣΚΗΣΗ (για σπίτι): Να βρεθεί ο προσαρτημένος L^+ του προηγ. παραδ. αν $k = k(x)$.

Παρατήρηση: Επίσης η συνθήκη, $f(b) g^*(b) = f(a) g^*(a)$ λέγεται προσαρτημένη συνθήκη κ. γενικά μπορεί να $\exists$ παραπάνω από μία τέτοιες συνθήκες.

Παρατήρηση: Για πραγματικούς δ.χ. ο προσαρτημένος λέγεται ανάστροφος (transponse) κ. γράφεται $A^+ = A^T$ με $\langle g | A f \rangle = \langle f | A^T g \rangle$

α) Ο A λέγεται συμμετρικός, τότε $A^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

β) Ο A λέγεται αντισυμμετρικός αν $A^T = -A$

γ) Ο A λέγεται ορθογώνιος αν $A^T = A^{-1}$

Ιδιοτιμές κ' ιδιοδιαν/τα

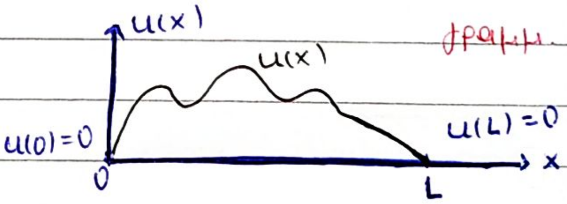
• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω ότι για του τελεστή $A \neq I$ $\exists\, |f\rangle$ με $|f\rangle \neq |0\rangle = 0$, τω. $A\cdot|f\rangle = \lambda\cdot|f\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Τότε το $|f\rangle$ καλείται ιδιοδιάνυσμα ή ιδιοσυν/ση του A κ' το λ αντίστοιχα ιδιοτιμή.

Παρατήρηση: Αν ο $A = I$, τότε κάθε διάν/μα είναι ιδιοδ/μα του εαυτού του κ' με ιδιοτιμή $\lambda = 1$.
Δηλ. $I\cdot|f\rangle = |f\rangle$, $\forall |f\rangle$ κ' $\lambda = 1$

ΠΑΡΑΔ.: Έστω ο τελεστής $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, στον χώρο των ομαλών συν/σεων (smooth) στο $x \in [0, L]$.
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A αν $u(0) = u(L) = 0$.
Ποια είναι η φυσική σημασία του προβλήματος?

ΛΥΣΗ:

Π.Σ.Τ. $\begin{cases} Au = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x), & x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$ ΣΔΕ 2ης τ., του β., γραμμ., ομογ.



Εφαρμογές: Στάσιμα κύματα κατά την ταλάντωση μιας χορδής, κβαντομηχανική, δυναμικό ενός σωματιδίου

Υποθ. ότι $u(x) = e^{px}$, όπου p σταθ., ώστε $p^2 + \lambda = 0$

$-p^2 e^{px} - \lambda e^{px} = 0 \iff \underbrace{(p+\lambda)}_{=0} \underbrace{e^{px}}_{\neq 0} = 0$

Θ.δ.ο. $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $\lambda \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow u(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x) \\ \lambda = 0 \Rightarrow u(x) = Ax + B \end{cases}$

για τις Σ.Σ.: $u(0) = B = 0$, $\lambda > 0$

$u(L) = A\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ $\quad \lambda > 0$

$A\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L}}$ $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

άρα $u(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Για τον υπολογισμό του A:

$\langle u | u \rangle = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow |A|^2 = \frac{2}{L}$

εγώ το υποθέτω

άρα $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

Για $\lambda = 0$ κ. $\lambda < 0$ θα βγει ότι $u(x) = 0$ (μηδενική λύση)

[Αναλυτικά στο επόμενο ...]